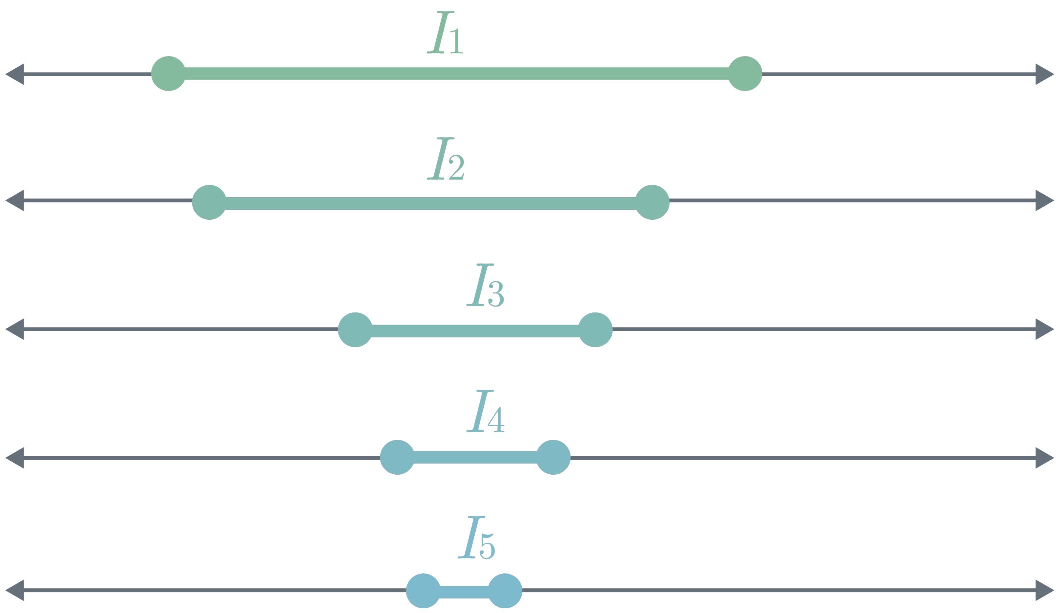
측도론 복습노트

디멘(최정담)



1. 대수

σ-대수

정의. X 위에서 정의된 **대수** $\mathcal{A}$는 다음의 조건을 만족한다.

1. $\varnothing$, X $\in \mathcal{A}$
2. 여집합에 대해서 닫혀 있음.
3. <u>유한</u> 합집합과 <u>유한</u> 교집합에 대해서 닫혀 있음. (cf. 드모르간 정리에 의해 하나만 충족하면 됨)

정의. X 위에서 정의된 **σ-대수** $\mathcal{A}$는 다음의 조건을 만족한다.

1. $\varnothing$, X $\in \mathcal{A}$
2. 여집합에 대해서 닫혀 있음.
3. <u>가산</u> 합집합과 <u>가산</u> 교집합에 대해서 닫혀 있음.

정의. $\mathcal{A}$가 X 위에서의 σ-대수일 때 (X, $\mathcal{A}$)는 **가측 공간**임.

정리. $\{\mathcal{A}_i\}$가 X 위에서의 σ-대수일 때, $\cap\mathcal{A}_i$는 σ-대수이다.

따름정의. $\mathcal{C}$가 X의 부분집합들의 모임일 때, $\sigma(\mathcal{C}) := \cap\{\mathcal{A} : \mathcal{A}$는 $\mathcal{C}$를 포함하는 σ-대수$\}$

i.e. $\sigma(\mathcal{C})$는 $\mathcal{C}$를 포함하는 "가장 작은" σ-대수

보렐 대수

정의1. X가 위상 공간이고 $\mathcal{G}$가 X의 모든 열린집합들의 모임일 때, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{G})$는 X의 **보렐 대수**.

정의2. 다음의 **보렐 위계**로부터 정의.

i. $A \in \Sigma^0_1$ iff A가 열린 집합
ii. $A \in \Pi^0_\alpha$ iff $A^c \in \Sigma^0_\alpha$

iii. $A \in \Sigma^0_{\alpha+1}$ iff $\exists \{A_n \in \Pi^0_{\alpha_n} : \alpha_n < \alpha\} : \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$

iv. $\Delta^0_\alpha = \Sigma^0_\alpha \cap \Pi^0_\alpha$

$\Sigma^0_1 = \mathscr{G}$	$\Pi^0_1 = \mathscr{F}$
$\Delta^0_1 = \text{Clopen}$	
$\Sigma^0_2 = F_\sigma$	$\Pi^0_2 = G_\delta$
$\dots$	
$\Sigma^0_{\omega_1} = \Pi^0_{\omega_1} = \Delta^0_{\omega_1} = \mathscr{B}$	

실수 토폴로지의 분해. ℝ의 열린집합은 $\sqcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)$ 꼴이다.

증명.

1. α(x) = inf { a : ∃b x ∈ (a, b) ⊂ U }, β(x) = sup { b : ∃a x ∈ (a, b) ⊂ U }
    1. U가 열린집합이므로 ∀x ∈ U, α(x) < β(x)
2. [α(x) = α(y)] ↔ [β(x) = β(y)]. 즉, $\mathcal{C}$ = { (α(x), β(x)) : x ∈ U }는 pairwise disjoint하다.
3. $\mathcal{C}$의 각 원소는 유리수를 포함하므로 ∃$\mathcal{D}$ s.t. $\mathcal{D}$는 가산 & disjoint & ∪$\mathcal{D}$ = ∪$\mathcal{C}$ = U

따름정리. $\mathcal{C}$ = { (a, b) : a, b ∈ ℝ }에 대해 σ($\mathcal{C}$) = $\mathscr{B}$이다.

cf. (a, b)를 [a, b], (a, b], (a, ∞) 등으로 바꿔도 성립.

단조류 정리

정의. $\mathscr{M}$ ⊂ $\mathcal{P}$(X)가 다음 두 조건을 만족할 때 $\mathscr{M}$은 **단조류**

1. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ⊂ M에 대해, $A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathscr{M}$
2. $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ⊂ M에 대해. $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathscr{M}$

정리. {$\mathscr{M}_i$}가 X 위에서의 단조류일 때, ∩$\mathscr{M}_i$는 단조류이다.

따름정의. $\mathcal{C}$가 X의 부분집합들의 모임일 때, $\mathscr{M}(\mathcal{C})$:= ∩{$\mathscr{M}$: $\mathscr{M}$은 $\mathcal{C}$를 포함하는 단조류}

단조류 정리. $\mathcal{A}_0$가 X 위에서의 대수일 때, $\sigma(\mathcal{A}_0) = \mathcal{M}(\mathcal{A}_0)$

증명. Goal: $\sigma(\mathcal{A}_0)$가 단조류임은 자명하므로, $\mathcal{M}(\mathcal{A}_0)$가 σ-대수임을 보이면 충분.

1. 여집합에 대해 닫혀 있음을 보이기
    1. $\mathcal{S} = \{ A \in \mathcal{M} : A^c \in \mathcal{M} \}$을 정의
    2. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{M}$인데 $\mathcal{S}$가 동치류이므로 $\mathcal{M}$의 정의에 따라 $\mathcal{S} = \mathcal{M}$.
2. 가산 교집합에 대해 닫혀 있음을 보이기
    1. 유한 교집합에 대해 닫혀 있음을 보이기
        1. $\mathcal{T} = \{ A \in \mathcal{M} : \forall B \in \mathcal{A}_0 \, [\, A \cap B \in \mathcal{M} \,] \}$을 정의
        2. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{M}$인데 $\mathcal{T}$가 동치류이므로 $\mathcal{M}$의 정의에 따라 $\mathcal{T} = \mathcal{M}$.
        3. $\mathcal{T}' = \{ A \in \mathcal{M} : \forall B \in \mathcal{M} \, [\, A \cap B \in \mathcal{M} \,] \}$을 정의
        4. 2에 의해 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{M}$인데 $\mathcal{T}'$가 동치류이므로 $\mathcal{M}$의 정의에 따라 $\mathcal{T} = \mathcal{M}$.
    2. 가산 교집합에 대해 닫혀 있음을 보이기
        1. 임의의 가산 교집합 $A = \cap A_n$은 $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$에 대해 $B_n \uparrow A$로 표현할 수 있음.

2. 측도

측도

정의. 가측 공간 $(X, \mathcal{A})$ 위에서의 측도 $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$는 다음의 조건을 만족한다.

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. *Countably pairwise disjoint*한 $\{A_n\}$에 대해 $\mu(\cup A_n) = \Sigma\, \mu(A_n)$

정리.

1. $A_n \uparrow A$라면 $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$
2. $A_n \downarrow A$이고 $\underline{\mu(A_1) < \infty}$라면 $\mu(A) = \lim \mu(A_n)$

정의. 가측 공간 $(X, \mathcal{A})$ 위의 측도 μ에 대해,

1. $\mu(X) < \infty$라면 μ는 **유한 측도**
2. 어떤 $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$에 대해 $\cup E_n = X$이고 각 n에 대해 $\mu(E_n) < \infty$라면 μ는 **σ-유한 측도**

   cf. $F_n = E_1 \cup \dots \cup E_n$ 치환에 따라 전제를 $F_n \uparrow X$, $\mu(F_n) < \infty$로 바꿔도 동치
3. $\mathcal{A}$가 모든 μ-영집합을 포함할 때 $(X, \mathcal{A})$는 **완전 측도 공간**

비탈리 정리. 다음을 모두 만족하는 $\mathbb{R}$ 위의 측도 μ는 존재하지 않는다.

1. μ는 실수의 <u>모든</u> 부분집합에 대해 정의된다.
2. μ는 항등적으로 0이 아니다.
3. μ는 평행이동에 대해 보존적이다. 즉, $\mu(A) = \mu(A + r)$이다.

<u>증명</u>

1. $x - y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \sim y$인 동치 관계에 대해 $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\sim$를 정의.
2. 선택 공리에 의해 주어지는 $\mathcal{C}$의 선택 함수 f에 대해 $V = \mathrm{Im}\, \mathcal{C}$를 정의. (V를 <u>비탈리 집합</u>이라고 함)

1. $q \in \mathbb{Q}$에 대해 V와 V + q는 서로소임.

3. $[0,1] \subset \cup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (V+q) \subset [-1,2]$이므로 좌에 의해 μ(V) > 0인 한편 우에 의해 μ(V) = 0 → 모순!

카라테오도리 정리

정의. 집합 X에 대해, 다음을 만족하는 함수 $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$은 **외측도**이다.

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$
3. 가산 개의 집합 $\{A_n\}$에 대해 $\mu^*(\cup A_n) \le \Sigma\, \mu^*(A_n)$

정의. 외측도 μ*에 대해 다음을 만족하는 집합 $A \subset X$는 **μ*-가측집합**이다.

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \text{for all } \ E \subset X$$

Note. μ*-가측집합은 X의 부분집합들을 “재는” 데 쓰일 수 있는 기준 집합들이다.

카라테오도리 구축 정리. X의 덮개 $\mathcal{C}$($\varnothing \in \mathcal{C}$)와 함수 $\ell: \mathcal{C} \to [0, \infty]$($\ell(\varnothing) = 0$)에 대해 다음의 μ*는 외측도이다.

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(A_n) : A_n \in \mathscr{C},\, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

Note. μ*(E)는 E의 덮개의 측도의 극한이며, “외측도”라는 이름의 유래임.

카라테오도리 측도화 정리. μ*가 X 위에서의 외측도일 때,

1. μ*-영집합은 μ*-가측집합이다.
2. μ*-가측집합들의 모임은 σ-대수이다.
3. μ*의 정의역을 μ*-가측집합들의 모임으로 제한한 μ는 측도이다.

카라테오도리 확장 정리. X 위의 대수 $\mathcal{A}_0$와 측도 $\ell: \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$에 대해 다음의 외측도 μ*를 정의한다.

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(A_n) : A_n \in \mathscr{A}_0,\, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

이 때, 다음이 성립한다.

1. $\mathcal{A}_0$와 μ^*-영집합은 모두 μ^*-가측이다.
2. ℓ이 σ-유한이라면, μ^*의 정의역을 $\sigma(\mathcal{A}_0)$으로 제한한 측도 μ는 ℓ의 정의역을 $\sigma(\mathcal{A}_0)$로 확장하는 유일한 측도이다.

르베그 측도

르베그 측도의 정의.

1. $\mathcal{C} = \{ (a, b] : a, b \in \mathbb{R} \}$, $\ell((a, b]) = b - a$로 두고 카라테오도리 구축 정리를 적용하여 외측도 μ^*를 얻음.
2. 카라테오도리 측도화 정리에 의해 μ^*를 μ^*-가측집합들로 제한하면 측도 μ를 얻음.

정리. 보렐 집합은 르베그 가측이다. ($\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$)

증명. $\mathcal{A}_0$를 $\{ [a, b) \}$로, $\ell([a, b)) = b - a$로 두고 카라테오도리 확장 정리를 적용.

르베그 근사 정리. A가 유계인 르베그 가측 집합일 때,

1. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $m(G \setminus A) < \varepsilon$인 열린집합 G가 존재한다.
2. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $m(A \setminus F) < \varepsilon$인 닫힌집합 F가 존재한다.
3. 어떤 G_δ 집합 G'가 존재하여 $m(G' \setminus A) = 0$이다.
4. 어떤 F_σ 집합 F'가 존재하여 $m(A \setminus F') = 0$이다.

증명. 실수 토폴로지의 분해의 따름정리.

카라테오도리 정리의 증명

카라테오도리 구축 정리의 증명.

1. inf의 정의에 의해 각 n에 대해 $\Sigma_m \mu^*(A_{nm}) \le \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$인 E_n의 덮개 $\{A_{nm}\}$가 존재.
2. 식을 모두 더하면 $\mu^*(\cup E_n) \le \Sigma\mu^*(A_{nm}) \le \Sigma\mu^*(E_n) + \varepsilon$ $\Rightarrow$ ε은 임의적이므로, $\mu^*(\cup E_n) \le \Sigma\mu^*(E_n)$.

카라테오도리 측도화 정리의 증명.

1. $\mathcal{A}$가 μ^*-가측집합들의 모임일 때, 집합론의 기초 법칙들로부터 $\mathcal{A}$가 대수임을 보일 수 있음.

2. $\mathcal{A}$가 σ-대수임을 보이기 위해서는 서로소인 $\{A_n\}$에 대해 $B = \cup A_n$가 μ*-가측임을 보이면 충분.

    1. $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n$로 정의. ($B_n \uparrow B$)

        i. $\mathcal{A}$가 대수이므로 B_n은 μ*-가측.

        ii. A_n이 가측이므로 $\mu(E \cap B_n) = \mu(E \cap A_n) + \mu(E \cap B_{n-1})$.

        iii. ii에 의해 $\mu^*(E \cap B_n) = \Sigma_{n \geq k}\, \mu(E \cap A_k)$

    2. μ*의 정의에 따라 다음이 성립하므로 B는 μ*-가측.

$$
\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \sum^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c) \\
&\geq \mu^*(\cup_{k=1}^{\infty} (E \cap A_k)) + \mu^*(E \cap B^c) \\
&= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \\
&\geq \mu^*(E)
\end{aligned}
$$

3. 위의 부등식이 성립하므로 모든 부등호는 등호이며, 특히 $\mu^*(E) = \sum^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B^c)$. E = B를 대입하면 $\mu^*(B) = \sum \mu^*(A_k)$가 되어 측도의 조건을 만족.

카라테오도리 확장 정리의 증명.

1. μ*가 유한 측도일 때, ν가 또다른 ℓ의 확장이라면 $A \in \sigma(\mathcal{A}_0)$에 대해 $\mu^*(A) = \nu(A)$이다.

    1. $\nu(E) \leq \mu^*(E)$은 $A \in \mathcal{A}_0$일 때 $\nu(A) = \ell(A)$라는 사실과 μ*의 정의로부터 쉽게 따라나옴.

    2. $\mu^*(E) \leq \nu(E) + \varepsilon$은 $\mu^*(E) + \varepsilon \geq \Sigma\, \ell(A_n)$가 되도록 하는 적당한 $\{A_n\}$을 선택하면 됨.

2. μ*가 σ-유한 측도일 때, ν가 또다른 ℓ의 확장이라면 $A \in \sigma(\mathcal{A}_0)$에 대해 $\mu^*(A) = \nu(A)$이다.

    1. $X = \cup K_n$, $\mu^*(K_n) < \infty$일 때 $\ell_n(A) := \ell(A \cap K_n)$은 유한 측도이므로, 1에 의해 ℓ_n의 확장은 유일.

    2. $\mu(A) = \lim \mu(A \cap K_n) = \lim \ell_n(A) = \lim \nu(A \cap K_n) = \nu(A)$

3. 가측함수

대수와 σ-대수

정의. 가측 공간 (X, $\mathcal{A}$)와 (Y, $\mathcal{B}$)에 대해, f: X → Y가 **가측**이라는 것은 E ∈ $\mathcal{T}$에 대하여 $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$인 것이다.

Note. Y가 ℝ일 때 별다른 명시가 없으면 Y의 σ-대수를 보렐 대수로 취함. 즉,

따름정리. $\{x : f(x) > a\} \in \mathscr{A}$라면 f: (X, $\mathcal{A}$) → ℝ는 가측이다.

따름정의.

- $\mathcal{A}$가 보렐 대수일 때 f가 가측이라면 f는 보렐 가측이다.
- $\mathcal{A}$가 르베그 대수일 때 f가 가측이라면 f는 르베그 가측이다.
- $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ 이므로 보렐 가측이면 르베그 가측이다.

정리. f, g, f_n이 가측이라면 다음 함수들은 가측이다.

- f + g, cf, fg
- max(f, g), min(f, g)
- sup f_n, inf f_n
- limsup f_n, liminf f_n

정리. 연속함수와 증가함수는 보렐 가측이다.

루진 정리.

4. 르베그 적분

대수와 σ-대수

정의. X 위에

5. 곱측도

대수와 σ-대수

정의. X 위에

6. 측도의 분해

분해정리

한 분해정리

조르당 분해정리

라돈-니코딤 정리

정의. X 위에